A N A L I Z A   F U N K C J O N A L N A

WPPT IV

Galowice, 20 maja 2013

Lista 21

ZADANIE 1. Niech (Ω, Σ, μ) będzie przestrzenią probabilistyczną. Niech E będzie miarą spektralną określoną na $L^2(\mu)$ wzorem

$$E(A) = \mathrm{Proj}_A \qquad (\text{czyli } E(A)(f) = f \cdot \mathbf{1}_A, \text{ dla } f \in L^2(\mu)).$$

Oblicz postać operatora $T_g = \int g\,dE$, gdzie g jest ustaloną funkcją mierzalną ograniczoną na Ω (to znaczy podaj i uzasadnij wzór na $T_g(f)$ dla $f \in L^2(\mu)$).

ZADANIE 2. Niech, jak poprzednio, (Ω, Σ, μ) będzie przestrzenią probabilistyczną. Niech $H = L^2(\mu) \oplus L^2(\mu)$ oznacza sumę ortogonalną (czyli de facto iloczyn kartezjański) dwóch kopii przestrzeni $L^2(\mu)$. Zadajmy miarę spektrlaną E na $\mathbb{T}$ wzorem $E(A) = \mathrm{Proj}_{L^2(\mu_A) \oplus L^2(\mu_A)}$, to znaczy jest to projekcja na podprzestrzeń będącą sumą ortogonalną podprzestrzeni $L^2(\mu_A)$ w pierwszej kopii $L^2(\mu)$ i jej odpowiednika w drugiej kopii. Ustalmy funkcję ograniczoną g na Ω. Wykaż, że operator $T = \int g\,dE$ wyraża się wzorem

$$T(x) = gf_1 \oplus gf_2,$$

gdzie $f_1 \oplus f_2$ jest rozkładem elementu $x \in H$ na parę funkcji z $L^2(\mu)$ (zgodnie z tym, że H jest sumą ortogonalną dwóch kopii $L^2(\mu)$).

ZADANIE 3. Niech E oznacza miarę spektralną *atomową* (to znaczy taką, która jest skupiona na zbiorze skończonym lub przeliczalnym). Jak działa operator $T = \int g\,dE$ dla zadanej funkcji ograniczonej g (określonej na tym zbiorze przeliczalnym).

ZADANIE 4. Operator na $L^2(\mu)$, gdzie μ jest unormowaną miarą Lebesgue'a na okręgu jednostkowym, jest zadany wzorem

$$Tf(z) = f(-z)$$

Znajdź widmo tego operatora a następnie jego miarę spektrakną (określoną na tym widmie i taką że $T = \int \lambda\,dE(\lambda)$).

Wskazówka: Rozłóż dowolną funkcję f na sumę funkcji ,,parzystej" (tzn. takiej, że $f(-z) = f(z)$) i ,,nieparzystej" (tzn. takiej, że $f(-z) = -f(z)$) i zobacz jak działa ten operator na składowych.

Tomasz Downarowicz